

ANALISI MATEMATICA B

Esercizio 1. Data la funzione $f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n(n-1)}$:

- A) Determinarne il dominio;
- B) Scrivere la derivata seconda $f''(x)$ nei punti interni al dominio come serie di potenze e, riconosciuto che si tratta di una serie notevole, determinarne la somma trovando in tal maniera una espressione esplicita di $f''(x)$;
- C) Dalla rappresentazione esplicita di $f''(x)$ ottenuta in B) ricavare quella per $f(x)$, sempre nei punti interni al dominio;
- D) Dedurre, con passaggi ben motivati, la somma della serie numerica $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)}$.

Esercizio 2. Si consideri il campo vettoriale nello spazio $G = (x, y + z, y + 2z)$.

- A) Senza determinarli esplicitamente prima della domanda F), provare che G ha potenziali globali $U(x, y, z)$;
- B) Determinare i punti critici liberi del potenziale $U(x, y, z)$ e classificarli;
- C) Presa la retta nello spazio intersezione dei due piani $x + z = 0$ e $y = 3$, si scriva una sua parametrizzazione e, tramite la regola della catena, provare che il potenziale $U(x, y, z)$ ha un minimo assoluto vincolato su di essa;
- D) Ritrovare il punto critico vincolato di C) col metodo dei moltiplicatori di Lagrange;
- E) Direttamente dalla definizione, calcolare il lavoro di G sul segmento orientato, parte della retta di cui sopra, di punto iniziale $(0, 3, 0)$ e punto finale $(1, 3, -1)$;
- F) Ricavare ora una espressione esplicita dei potenziali $U(x, y, z)$ e verificare il risultato in E).

Esercizio 3. Dato il solido $A = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 1/2\}$, calcolare $\int \int \int_A (x^2 + y^2 + z^2)^{-1} dx dy dz$.

Esercizio 4. Della funzione $x(t)$ è nota la trasformata $\hat{x}(\omega) = (1 + i\omega)^{-2}$.

- A) Determinare $x(t)$. [Risultato: $x(t) = u(t)te^{-t}$]
- B) Verificare l'uguaglianza di Parseval.
- C) Dopo aver detto perchè la derivata prima di $x(t)$ in senso usuale coincide con quella nel senso delle distribuzioni, determinare la derivata seconda debole x'' applicando alla funzione x' la definizione di derivata distribuzionale.
- D) Calcolare \hat{x}'' direttamente dal risultato di C) e verificare poi la relazione attesa con \hat{x} . [Durante il calcolo di \hat{x}'' , per uno dei termini si può utilizzare A)]